RED BUILDING TEAM

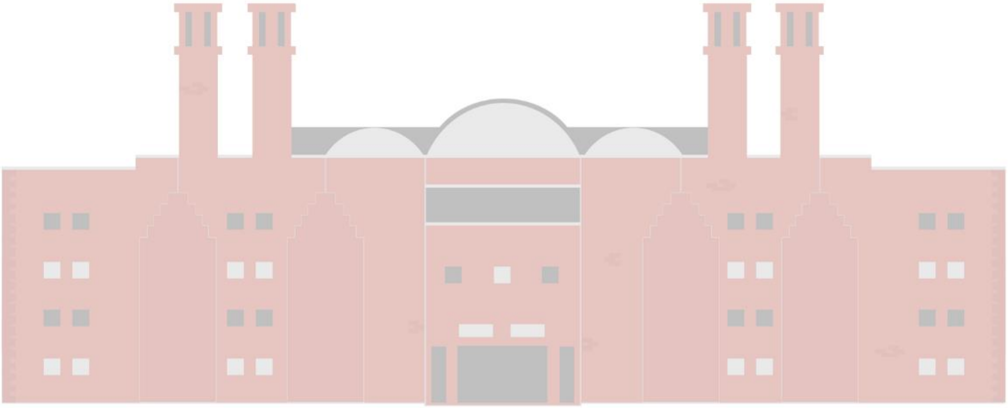
قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

التَحليل العَددِي

المحاضرة السابعة

9 صفحات



الدكتور: عماد فتاش

التاريخ: ٢٠١٤/١٠/٢٩

السرعة، الدقّة والتميُّز

/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحنُ نحتاجه من قلوبكم ♥

طريقة التكرار، طريقة النقطة الثابتة، طريقة تكرار النقطة الثابتة

•البحث عن عملية التكرار:{ITERATION}

*طريقة النقطة الثابتة: {FIXED POINT}

•طريقة تكرار النقطةالثابتة : F P I (اختصار الكلمة)

ليكن لدينا مجموعة النقاط $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = R = x^*$$

ان هذه الطريقة تعني البحث عن شكل اخر للدالة $f(x)$ وتكون بشكل

$$g(x) - \varphi(x) = 0$$

مثال: $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$

الحل: ان الشكل الاخر للدالة هو من الشكل:

1) $x = -x^3 - 1$

او :

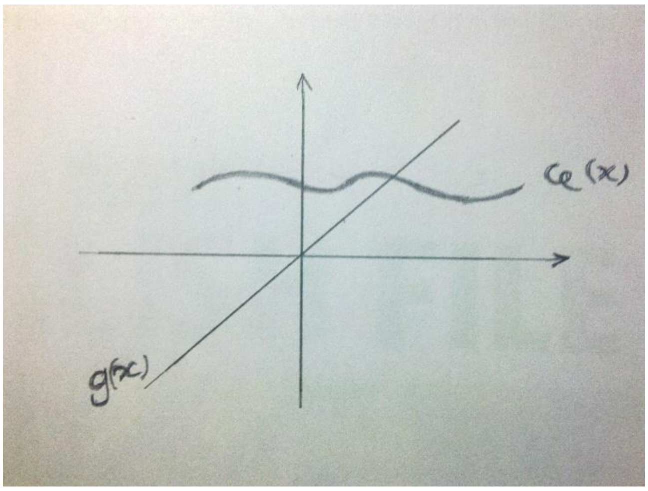
2) $x(x^2+1) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{x^2+1}$

بمعنى اخر اننا يمكننا البحث عن حل لهذه المعادلة بين المستقيم $(y=x)$ والمنحني $\varphi(x)$ وهي نقطة تقاطعهما . ومن الاشكال الأخرى:

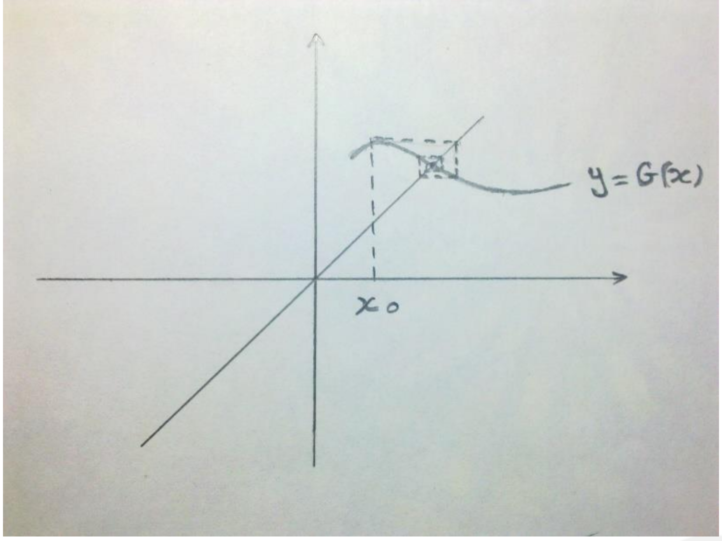
3) $x = \sqrt[3]{1-x}$

4) $x = x^3 + 2x - 1$

5) $x = \frac{1}{10}(x^3 + 11x - 1)$



وبذلك يكون لدينا عدد غير منتهي من الاشكال للدالة وبعدما اوجدنا الدالة $f(x) = 0$ بشكل اخر x=G(x) نقوم بحساب $x_1, x_2, \dots$ وذلك بتعويض x_0 بالدالة G(x) علما ان x_0 معطاة من نص المسالة فنجد:



$$x_1 = G(x_0)$$
$$x_2 = G(x_1)$$
$$x_3 = G(x_2)$$
$$\vdots$$

يمكننا حساب النقطة بيانيا بالطريقة الأولى الموجودة في الشكل (الحلزونية) ولكن ليس أي x_0 سوف تقودنا الى الحل فيجب ان يكون لهل شروط محددة.

ملاحظة: عند البحث عن شكل اخر ل *F(X)=0* نحرص ان يكون من الشكل ..=*X* أي من الدرجة الأولى وبالتالي معادلة مستقيم.

تعريف: نقول عن P انها نقطة ثابتة للدالة g(x) إذا كانت P=G(p)

مثال: $e^{-x}\sin x = 1$

الحل: نضرب ب e^x

$$\sin x = e^x \Rightarrow x = \ln|\sin x| \Rightarrow \mathrm{G(x)} = \ln|\sin x|$$

مثال:

$$G(x) = 2(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

ان لهذا التابع نقطة ثابتة p والتي شرطها أن يكون $P = G(P)$

إن $P = 2$ نقطة ثابتة ل G(X) لإن $2(2-1)^{\frac{1}{2}} = 2$

إن كيفية معرفة النقطة الثابتة p هي إيجاد متتالية تقودنا الى هذا الحل وهذا ما سنقوم بالتوصل اليه

استنتاج هذه النقطة الثابتة سيكون كما يلي :

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

دالة التكرار $G(x) = 2(x-1)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{cases} x_{n+1} = G(x) \\ x_0 : \text{معطاة} \\ n = 0,1,2,\dots\dots,n \end{cases}$$

ونقوم بحساب مايلي :

$$x_1 = G(x_0)$$

$$x_1 = 2(x_0-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = 2(x_1-1)^{\frac{1}{2}}$$

:

ونحن امام حالتين من الشكل :

$case(i)$	$case(ii)$
$x_0 = 1.5$	$x_0 = 2.5$
$x_1 = 2(x_0-1)^{\frac{1}{2}}$ $x_1 = 1.41421356$	$x_1 = 2.44948974$
$x_2 = 1.28718851$	$x_2 = 2.40789513$

rbt
لا تنسوا زيارتنا على مواقع التواصل الإجتماعي

$x_3 = 1.07179943$	$x_3 = 2.37309514$
$x_4 = 0.53590832$	$x_4 = 2.34358224$
$x_5 = 2(-0.4{,}409168)^{\frac{1}{2}}$	. . .
	$\lim_{n\to\infty} x_n = p = 2$

مثال: هل النقطة $\frac{1}{2}$ هي نقطة ثابتة في التابع $G(x) = 3x - 1$

الحل: نعوض التابع فنجد: $G\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

مثال: حل المعادلة التالية:

$f(x) = \cos x - 4x = 0$ ضمن المجال $[\,0\,,\frac{\pi}{2}\,]$

الحل :

$$f(0) = 1 > 0$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\pi < 0 \Leftarrow f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \Leftarrow$ يوجد حل

ان الشكل الاخر للدالة $f(x)$: هو $x = \frac{1}{4}\cos x$ فإن $G(x) = \frac{1}{4}\cos x$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4}\cos x_n \\ n = 0,1.2, \dots . \\ x_0 \end{cases}$$

في حال $x_0 = \frac{\pi}{4}$

$$x_1 = 0.1768$$

$$x_2 = 0.2461$$

$$x_3 = 0.2425$$

$$x_4 = 0.2427$$

ونبقى نحسب القيم حتى نصل للدقة المطلوبة $\varepsilon = 10^{-k}$ ونعوض في القانون :

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

نلاحظ اقتراب الأرقام من بعضها أي ثبات بعض الأرقام بعد الفاصلة.

شرط تقارب طريقة التكرار :

$$f(x) = 0$$

$$x = G(x)$$

دالة التكرار والنقطة الثابتة ل G(X) موجودة ضمن المجال (a,b)

$G'(x)$ موجود في (a<x<b) هذا يعني الحل موجود في المجال (a,b)

ولتكن p هي النقطة الثابتة إذا كان $|G'(x)| < 1$ في جوار الحل لp من (a,b)

فإن اختيار x_0 من هذا الجوار سوف يؤدي الى متتالية تكرارية تقود الى الحل

أي ان في مثالنا السابق عندما $G(x) = \frac{1}{4}\cos X$ فان شرط تقارب طريقة التكرار:

$$|G'(x)| = \left|-\frac{1}{4}\sin x\right| < 1;\ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

وطالما هو محقق فسيقودنا الى الحل الأقرب.

مثال:

$$G(x)=\frac{2}{3}\sin x \text{ في المجال } [\,0,\pi\,]$$

$$f(x)=\mathrm{x}-\frac{2}{3}\sin x=0$$

$$\mathrm{x}=\frac{2}{3}\sin x$$

$$G'(x)=\frac{2}{3}\cos x$$

$$\forall \mathrm{x}\in[0,\pi]:|\,G'(x)|=|\frac{2}{3}\cos x\,|\leq\frac{2}{3}<1$$

مثال: $X^2-100X+1=0$ ضمن المجال $[\,10\,,100\,]$

$f(100)=1>0\ ,\ f(\,10)<0$ هذا يعني ان الحل موجود.

$$G(X)=100-\frac{1}{X}\Rightarrow|\mathrm{G}'(x)|=\left|\frac{1}{\mathrm{x}^2}\right|<1;\ \forall x\in\ [\,10\,,100\,]$$

$$\left[\begin{array}{l} x_{n+1}=100-\dfrac{1}{X_N} \\ n=0,1.2,\ldots. \\ x_0=10 \end{array}\right.$$

نحسب مايلي

$$x_1=100-\frac{1}{10}=99.9$$

$$x_2=99\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

$$x_3=9\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

بعد ان نصل القيمة الأكثر ثباتا ولحسابها بدقة معينة تكون معطاة في نص المسالة حسب القانون $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ ونحسب المقدار $\varepsilon = 10^{-k}$

طريقة هورنر في إيجاد جذر (حل –صفر)لكثير الحدود ..

مثال: اوجد بطريقة هورنر الجذر الواقع بين [2,3] للمعادلة التالية :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2.5 = 0$$

إن الحل من الشكل ... ... $2.a_1 a_2 a_3$ لأن المجال يبدأ من الـ 2 الى الـ 3 اخر قيمة في المجال ....

إن المجهول هو هذا الجزء العشري حيث تتراوح قيمته كالتالي : $a_i \in \{0,1,2,3, \dots \dots ,9\}$

☒ كيف يمكننا تحديده؟

لمعرفة الجزء العشري من الحل نأخذ أمثال المعادلة ونحلها عبر طريقة هورنر (الجدول)

$x = 2$	1	-3	0	2.5	
		2	-2	-4	
	1	-1	-2	-1.5	نعزلها
		2	2		
	1	1	0		
		2			
	1	3			

ثم نقوم بتشكيل من القيم المعزولة من الجدول أمثال لكثير حدود وليكن :

$\emptyset_1(x) = x^3 + 3x^2 - 1.5$ وجذره من الشكل ... ... $0.a_1 a_2 a_3$

اذا قمنا بضرب الجذر بـ 10 نحصل عليه كالتالي: ... $a_1.a_2 a_3 a_4$ وبما أننا ضربنا الجذر بـ 10 فأصبح لدينا كثير حدود جديد حله من الشكل السابق ... $a_1.a_2 a_3 a_4$ وهو نفس كثير الحدود $\emptyset_1(x)$ ولكن مراتبه التي من الدرجة الثانية فما دون مضروبة بـ 10 أي:

$$\emptyset_2(x) = x^3 + 3(10)x^2 + 0(100)x + 1.5(1000)$$

$$\Rightarrow \emptyset_2(x) = x^3 + 30x^2 - 1500 = 0$$

بالتجريب: نجد أن $\emptyset_2(6) = -v\ ,\emptyset_2(7) = +v$

"ونقصد بطريقة التجريب البحث عن رقمين اذا قمنا بتعويضهم في كثير الحدود كان الناتج مساويا بالقيمة ولكن مختلفا بالإشارة"

فالحل (الجذر) ... $a_1.a_2a_3a_4$ يقع بين 6 و7 وبالتالي ان $a_1 = 6$ ""اذا ان المرتبة الأولى من الجزء العشري للحل يساوي الـ6 فاصبح لدينا الحل: ... $2.6a_2a_3a_4$ ""وبالتالي أصبح لدينا الجزء العشري $0.a_2a_3a_4$ هو المجهول ومن اجل حسابه نقوم من جديد بما يللي ..

نأخذ أمثال كثير الحدود السابق $\emptyset_2$ ونحله من جديد بطريقة الجدول (هورنر)...

$x = 6$	1	30	0	-1500
		6	216	1296
	1	36	216	-204 → نعزلها
		6	252	
	1	42	468 →	
		6		
	1	48 →		

نعود لنشكل من القيم التي تم عزلها كثير حدود جديد $\emptyset_3$ وهو من الشكل :

$$\emptyset_3(x) = x^3 + 48\,x^2 + 268x - 204 = 0$$

ان جذر هذه المعادلة من الشكل ... $0.a_2a_3a_4$ نضرب الجذر بـ 10 فيصبح لدينا من الشكل ... $a_2.a_3a_4$ وكأن الجذر الجديد هو أيضا حل لكثير حدود جديد يساوي كثير الحدود $\emptyset_3$ ولكن امثاله التي من الدرجة الثانية مضروبة بـ 10 كما يلي :

$$\emptyset_4(x) = x^3 + 48(10)x^2 + 468(100)x - 204(1000) = 0$$

$$\Rightarrow \emptyset_4(x) = x^3 + 480x^2 + 46800x - 204000 = 0$$

بالتجريب نجد : $\emptyset_4(4) = -v\,, \emptyset_4(5) = +v$

وبالتالي الحل لدينا ينتمي الى المجال[4,5] ويكون من الشكل ... $4.a_3a_4a_5$ ونعود لحساب قيم الجزء العشري كما فعلنا سابقا .... فنحسب $a_3 = 1$

""فاصبح لدينا الـ $a_2 = 4$ والـ $a_3 = 1$ بالتالي حل المعادلة هو : ......2.641""

ملاحظة : يتم تحديد كم مرتبة عشرية يجب حساب قيمتها من نص السؤال

مثال: اوجد حل المعادلة $x^3 + 3x - 1 = 0$ بمرتبتين عشريتين في المجال [0,1]

للتأكد من صحة وجود الحل في هذا المجال نطبق قانون التحقق :$f(0)f(1) < 0$ فالحل موجود والذي من الشكل ... $0.a_1a_2a_3$ ونستمر في حلها على منوال المثال السابق ولكن يكفي إيجاد a_1, a_2 لانه تم تحديد كم مرتبة عشرية من نص السؤال .

هناك طريقة واحدة للنجاح في أي شيء وهي أن نعطي هذا الشيء كل ما لدينا .